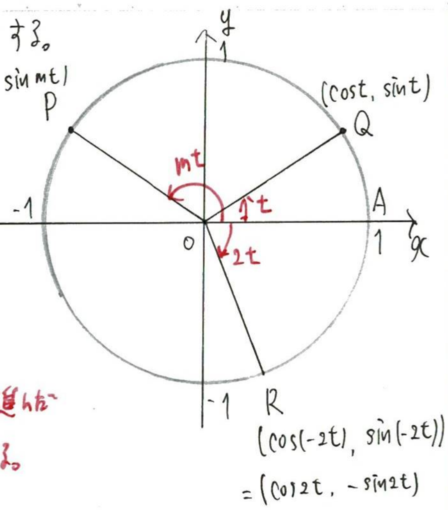
2010年　東大数学　文系第4問　理系第5問

右のように座標を設定する。



単位円が登場
角度がバラバラな点が
複数登場することなど
から、座標の設定を
思いつく。

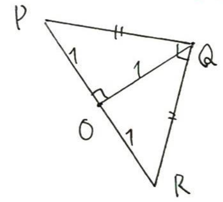
半径が1なので、点Aから進んだ
きょりと、角度が一致する。
(角速度 = 円周)

$\triangle PQR$が PRを斜辺とした直角二等辺三角形になる。

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ \text{PRが円の直径}\ (①)\ \text{かつ} \\ \cdot\ \overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{OR}\ (②)\ \text{となる。} \end{cases}$

つまり $\angle PQR = 90^\circ$

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ や
$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OR}$ でも可
計算量が一番少ないので、$\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{OR}$を採用。



①について。

PRが円の直径となるとき、PRの中点が原点なので、

$$\frac{\cos mt + \cos 2t}{2} = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\sin mt - \sin 2t}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos mt + \cos 2t = 0 \\ \sin mt - \sin 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{m+2}{2}t \cos \frac{m-2}{2}t = 0 \\ \cos \frac{m+2}{2}t \sin \frac{m-2}{2}t = 0 \end{cases}$$

和→積の公式

ここで $\cos \frac{m-2}{2}t = 0$ かつ $\sin \frac{m-2}{2}t = 0$
となるような(m, t)は存在しない。

同じ角度で、sinとcosが同時に0にならない

よって $\cos \frac{m+2}{2}t = 0$ を求めればよい。

$$\therefore \frac{m+2}{2}t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k\text{は整数})$$

$$\Leftrightarrow (m+2)t = \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow (m+2)t = (2k+1)\pi \quad \cdots ①'$$

別解　Pの角度は mt、Rの角度は $-2t$ なので、
PとRの間の角度は $mt - (-2t) = (m+2)t$。
これが、$\pi + 2k\pi$ になればよく、
$(m+2)t = (2k+1)\pi \quad \cdots ①'$

②について。

$\overrightarrow{OQ} = (\cos t, \sin t)$　$\overrightarrow{OR} = (\cos 2t, -\sin 2t)$ なので
$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR} = 0$

$\Leftrightarrow \cos t \cos 2t + \sin t \cdot (-\sin 2t) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(t + 2t) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 3t = 0$

$\Leftrightarrow 3t = \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (l\text{は整数})$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + \frac{l}{3}\pi$

整数lを動かし、$0 \leqq t \leqq 2\pi$ を満たすのは、
$t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$ の6通り。 ②'

別解　Qの角度はtで、Rの角度は$-2t$なので、
QとRの間の角度は$3t$となる。
これが、$\frac{\pi}{2} + k\pi$ になればよく、$3t = \frac{\pi}{2} + k\pi$

①'かつ②'を解く。

(i) $t = \frac{\pi}{6}$ のとき、①' $\Leftrightarrow m = 12k + 4$　$1 \leqq m \leqq 10$ で満たすものは $(m, k) = (4, 0)$

(ii) $t = \frac{\pi}{2}$ のとき ①' $\Leftrightarrow m = 4k$ より　$(m, k) = (4, 1)\ (8, 2)$

(iii) $t = \frac{5}{6}\pi$ のとき ①' $\Leftrightarrow m = \frac{12}{5}k - \frac{4}{5}$　$(m, k) = (4, 2)$

(iv) $t = \frac{7}{6}\pi$ のとき ①' $\Leftrightarrow m = \frac{12}{7}k - \frac{8}{7}$　$(m, k) = (4, 3)$

(v) $t = \frac{3}{2}\pi$ のとき ①' $\Leftrightarrow m = \frac{4}{3}k - \frac{4}{3}$　$(m, k) = (4, 4)\ (8, 7)$

(vi) $t = \frac{11}{6}\pi$ のとき ①' $\Leftrightarrow m = \frac{12}{11}k - \frac{16}{11}$　$(m, k) = (4, 5)$

よって、条件を満たす (m, t) は

$(m, t) = \left(4, \frac{\pi}{6}\right) \left(4, \frac{\pi}{2}\right) \left(4, \frac{5}{6}\pi\right) \left(4, \frac{7}{6}\pi\right) \left(4, \frac{3}{2}\pi\right)$
$\left(4, \frac{11}{6}\pi\right) \left(8, \frac{\pi}{2}\right) \left(8, \frac{3}{2}\pi\right)$ //